AULA

15

Aplicações

META:

Descrever algumas problemas que são modelados por sistemas de equações lineares.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Deduzir as equações diferenciais que modelam movimentos, tais como: o movimento de um corpo presso a uma mola.

Resolver alguns desses problemas.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos das aulas 1, 2, 6, 7, 8, 13 e 14.

15.1 Introdução

Caros alunos, essa é a nossa última aula. Espero que o curso tenha sido proveitoso para vocês. O campo das equações diferenciais ordinárias é imenso e não tivemos aqui a intenção de apresentar todos os métodos existentes de resolução de equações diferenciais ordinárias. No entanto, ficamos satisfeitos se, ao final desse curso, vocês puderem resolver alguns dos problemas que serão apresentados a vocês ao longo da sua formação.

15.2 Problemas envolvendo sistemas de equações lineares

15.2.1 Molas acopladas

Considere dois corpos de massas m_1 e m_2 acoplados num sistema massa-mola, como mostra a figura abaixo

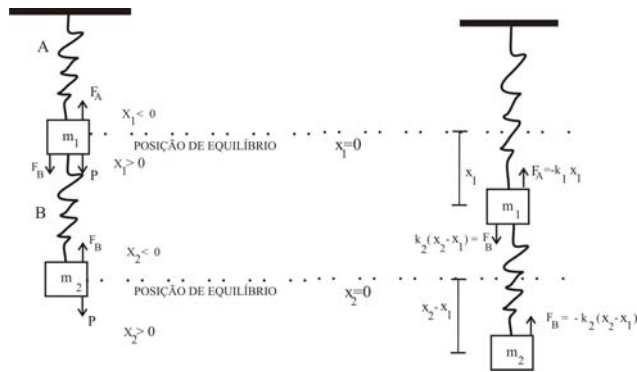



Figura 15.1: Sistema massa-mola acoplado.

Suponhamos que as molas A e B tenham constantes k_1 e k_2, respectivamente. Seja $x_1(t)$ e $x_2(t)$ as funções que descrevem, respectivamente, os deslocamentos verticais dos corpos de massa m_1

e m_2 ao longo do tempo. Observe que quando o sistema estiver em movimento a mola B será tanto alongada quanto comprimida, dessa maneira o deslocamento vertical resultante da mola B será $x_2 - x_1$. Assim, segundo a Lei de Hooke, o corpo de massa m_1 sofrerá as forças $-k_1x_1$ (com respeito a mola A) e $k_2(x_2 - x_1)$ (com rspeito a mola B). Já o corpo de massa m_2 sofrerá a força $-k_2(x_2 - x_1)$, devido a mola B apenas, como indicado na figura acima. Portanto, considerando que não há forças externas atuando e nem forças de amortecimento, as equações de movimento do sistema massa-mola apresentado são

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{15.78}$$

Note que esse problema recai num sistema linear de primeira ordem homogêneo com coeficientes constantes. E esse tipo de sistema já sabemos resolver, vamos resolvê-lo?

Primeiramente vamos transformar o sistema (15.78) num sistema de primeira ordem. Para isso, façamos $x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = x_1', x_4 = x_2'$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3 \\ x_2' &= x_4 \\ x_3' &= -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \\ x_4' &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 \end{aligned}$$

Matricialmente, o sistema assume a forma

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Como exercício, resolva o sistema acima quando $k_1 = k_2 = 2$ N/m e $m_1 = 1$ Kg e $m_2 = 3$ Kg. Considere ainda que as massas partem da posição de equilíbrio com velocidades unitárias opostas, ou seja, o problema tem as seguintes condições iniciais $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1, x_4(0) = -1$.

15.2.2 Sistemas elétricos: Malhas paralelas

Considere um sistema elétrico com malha paralela contendo dois indutores e dois resistores, como mostra figura abaixo

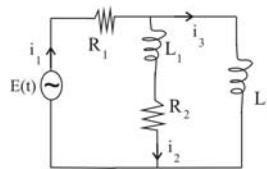



Figura 15.2: Circuito paralelo.

Sabemos que ao fecharmos o circuito começa a passar corrente pelos componentes do circuito e, pela Lei de Kirchhoff, a soma das quedas de tensão em cada componente é igual a tensão aplicada ao circuito. Como o circuito está em paralelo cada malha recebe a mesma tensão da fonte e desde que a queda de tensão no resistor e indutor, respectivamente, é dada por Ri, Li', segue que

$$E(t) = R_1 i_1 + L_1 i_2' + R_2 i_2$$

$$E(t) = R_1 i_1 + L_2 i_3',$$

onde $i_1 = i_2 + i_3$. Substituindo o valor de i_1 no sistema acima de maneira que fiquemos com um sistema apenas em função das correntes i_2 e i_3, obtemos

$$\begin{aligned} E(t) &= R_1(i_2 + i_3) + L_1 i_2' + R_2 i_2 \\ E(t) &= R_1(i_2 + i_3) + L_2 i_3', \end{aligned} \tag{15.79}$$

que, na forma matricial, é dado por

$$\begin{pmatrix} i_2' \\ i_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_2+R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} \\ -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E(t)}{L_1} \\ \frac{E(t)}{L_2} \end{pmatrix}.$$

Ache como cada corrente se comporta ao longo do tempo, sabendo que $R_1 = 2$ Ohm, $R_2 = 1$ Ohm, $L_1 = 3$ Henry, $L_2 = 1$ Henry e $E(t) = 3 sen\, 4t$.

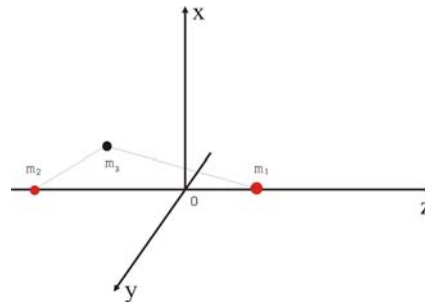
15.3 Problemas envolvendo sistemas de equações não lineares

15.3.1 Movimentos de corpos celestes

O movimento de corpos celestes também é modelado por equações diferencias ordinárias. Vamos deduzir as equações de movimento de um famoso problema da mecânica celeste: **o problema geral dos três corpos**. Nele estuda-se a dinâmica de três partículas, as quais se movem no espaço $\mathbb{R}^3$ de acordo com suas forças mútuas de atração gravitacional. Sejam m_1, m_2 e m_3 as três partículas no espaço cuja posição dos vetores são $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ and $\mathbf{r}_3$, respectivamente. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a força de atração entre as partículas é $\mathcal{G} m_i m_j r_{ij}^{-2}$, where $i, j = 1, 2, 3,$

$r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ e $\mathcal{G}$ é a constante de gravitação universal. As equações diferenciais do problema dos três corpos são

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{\mathcal{G}m_1m_3}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\mathcal{G}m_2m_1}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{\mathcal{G}m_2m_3}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \\ m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 &= \frac{\mathcal{G}m_3m_1}{r_{13}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{\mathcal{G}m_3m_2}{r_{23}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3), \end{aligned}$$

Como podemos ver trata-se de um sistema de segunda ordem não linear, dessa maneira com o que vimos até então neste curso não é possível resolver tal problema. Esse problema se encontra em aberto até os dias atuais, não se conseguiu ainda expressar uma solução geral para ele.

15.4 Conclusão

Na aula de hoje, concluímos que os sistemas de equações, sejam elas lineares ou não, estão presentes em problemas reais e muitos deles de grande importância científica. Nesta aula estivemos longe de apresentar uma boa parte desses problemas, apenas demos um "gostinho"do que pode ser investigado. Esperamos que com isso vocês se sintam motivados a procurarem mais aplicações para os sistemas de E.D.O..

RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos algumas das aplicações dos sistemas de equações diferenciais, vimos o sistema massa-mola acoplado, além de circuitos elétricos e movimentos de corpos celestes.

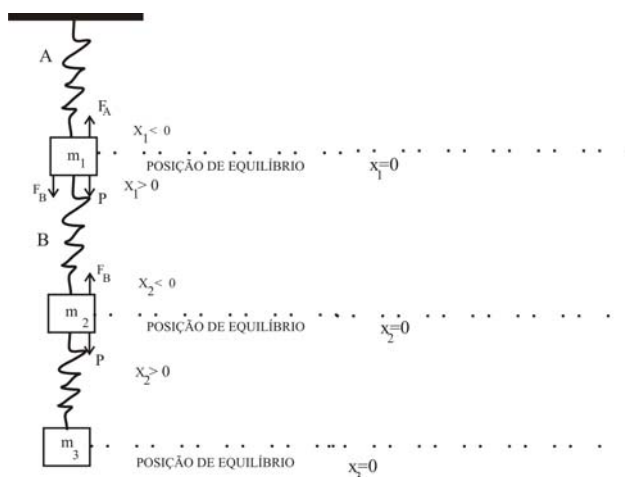
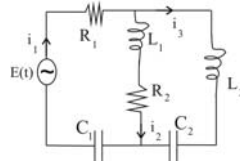
PRÓXIMA AULA

..

Até o próximo curso. Boas férias!!

ATIVIDADES

..

Atividade. 15.1. Complete o esquema de forças apresentado na figura abaixo e ache as equações de movimento dos corpos de massa m_1, m_2 e m_3.

Atividade. 15.2. Ache as equações de movimento do problema descrito abaixo.

LEITURA COMPLEMENTAR

..

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

15.5 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.